www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. *Il est demandé EXPRESSEMENT aux candidats de donner des démonstrations CLAIRES, CONCISES et RIGOUREUSES. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur, non plus qu'une référence à un théorème du cours non précisé, ou dont on n'aurait pas contrôlé que les hypothèses sont vérifiées.*

Les candidats DOIVENT RESPECTER LES NOTATIONS du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.

Il est INUTILE de RECOPIER le présent énoncé.

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

Notations. On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{N}$ celui des entiers naturels.

- I -

1) Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, définie, continue et périodique sur $\mathbf{R}$ dont une période est n. Pour tout réel x on pose : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) La fonction $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui à x fait correspondre F(x) est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$: donner sa fonction dérivée et établir que $F(x+n) - F(x)$ est constant sur $\mathbf{R}$.

b) Dans le cas où f est paire, vérifier qu'alors F est impaire et qu'alors, pour tout x réel, on a : $F(x+n) - F(x) = 2F(n/2)$.

2) k étant une constante réelle de $]-1,1[$, on considère les fonctions réelles d'une variable réelle f_k et F_k définies pour tous t et x de $\mathbf{R}$ par :

$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \quad \text{et} \quad F_k(x) = \int_0^x f_k(t)\,dt$$

a) Vérifier que f_k possède les propriétés de la fonction f de la question précédente, 1).

b) Etablir l'inégalité $F_k(x) \geq x$ pour tout x positif.

c) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de zéro de F_k. En déduire la nature du point de coordonnées $(0, F_k(0))$ et la position du graphe de F_k par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.

d) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} F_k(x)$ et justifier la propriété suivante :

F_k est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur lui-même.

Tournez la page S.V.P.

e) Prouver l'existence de la fonction réciproque de F_k notée F_k^{-1}. Quelles en sont les propriétés essentielles ?

Démontrer, pour tout y réel, l'égalité : $F_k^{-1}(y + 2F_k(\pi/2)) = F_k^{-1}(y) + \pi$.

f) On pose $G_k(y) = \left(F_k^{-1}\right)'(y)$ la dérivée de la fonction F_k^{-1} au point y.

Etudier la parité, la périodicité et la dérivabilité de la fonction G_k ainsi définie.

Ecrire le tableau de variation G_k sur $[0, F_k(\pi/2)]$.

g) Construire le graphe de $G_{\sqrt{2}/2}$ dans un système d'axes orthonormés d'unité 4 cm : on admettra que 1,85 est une valeur approchée de $F_{\sqrt{2}/2}(\pi/2)$ et l'on ne cherchera pas à préciser les coordonnées des points d'inflexion.

- II -

On considère les trois fonctions réelles K, A et B définies comme suit :

$$x \in]-1,1[\quad , \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}$$

$$x \in]-1,1[\quad , \quad A(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin t}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}\, dt$$

$$x \in]-1,1] \quad , \quad B(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - x \sin t}{1 + x \sin t}}\, dt$$

1) a) Vérifier les trois propriétés :

K est définie, continue, paire sur $]-1,1[$

A est définie, continue, impaire sur $]-1,1[$.

B est définie, continue sur $]-1,1]$.

b) Etablir, pour tout x de $[0,1[$, l'égalité $K(x) = A(x) + B(x)$.

c) Pour tout x de $[0,1[$ expliciter $A(x)$ à l'aide de la fonction logarithme népérien.

d) Calculer $B(1)$.

e) Déduire de ce qui précède les deux limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(K(x) - \ell n \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} K(x)$$

2) a) Pour tout n de N on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\, dt$.

Calculer I_0 et, par récurrence, I_n.

b) Justifier que pour tout t de $[0,\pi/2]$, $g_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

Déterminer le développement de $g_t(x)$ et donner son rayon de convergence.

Tournez la page S.V.P.

c) Conclure que K est développable en une série entière, $\sum_{n \in N} a_n x^n$, au voisinage de zéro.

Calculer ce développement et montrer qu'il est valable sur $]-1,1[$.

d) Que peut-on dire de $\sum_{n \in N} a_n$?

3) a) Etablir que $J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ est convergente et que sa valeur est $\frac{\sqrt{2}}{2} K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Donner les valeurs numériques approchées de J et $K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ à 5.10^{-7} près, sans chercher à effectuer un calcul de primitive.

b) On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n \in N}$ et $(v_n)_{n \in N}$ définies par :

$$u_0 = \sqrt{2} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$v_0 = 1 \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Démontrer que ces deux suites sont monotones et adjacentes. Calculer leur limite commune ℓ à 5.10^{-7} près ; puis $\frac{\pi}{2\ell}$. Que remarque-t-on ?

- III -

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{E}$ une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^n$.
On note $M_n(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n et I_n la matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$.
On identifiera $M_1(\mathbf{R})$ à $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire que pour tout a de $\mathbf{R}$ on a : (a) = a).

On se donne une matrice unicolonne

$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ à n lignes et une matrice uniligne $L = (\ell_1 \dots \ell_n)$ à n colonnes

vérifiant $LC \neq 0$.

Enfin, on note $B = CL$ et, α étant un réel donné, on pose : $A = \alpha I_n - B$.

A 1) Vérifier que B est dans $M_n(\mathbf{R})$. Déterminer le rang de B.
Si u est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ admettant B pour matrice dans la base $\mathcal{E}$, calculer la dimension du noyau de u.

2) $M = (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ étant un élément de $M_n(\mathbf{R})$ on note :

$$T(M) = \sum_{1 \le i \le n} m_{ii}$$, la trace de M.

a) Montrer que l'application T, de $M_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ qui à M fait correspondre T(M) est $\mathbf{R}$-linéaire.

b) Etablir que pour tous M et N de $M_n(\mathbf{R})$ on a l'égalité : $T(MN) = T(NM)$.

En déduire, si N est inversible, l'égalité : $T(N^{-1}MN) = T(M)$.

3) Démontrer que α est valeur propre de A et calculer AC. En déduire les valeurs propres de A avec leurs ordres de multiplicité (comme zéros du polynôme caractéristique de A) et en conclure que A est diagonalisable.
Donner une relation entre ces valeurs propres.

4) β étant valeur propre de A distincte de α, établir les résultats suivants :

$B^2 = T(B)\,B$.

$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I_n = 0_n$ (où 0_n désigne la matrice nulle de $M_n(\mathbf{R})$).

A est inversible si et seulement si $\alpha\beta \neq 0$.

5) Dans le cas où A est inversible, calculer son inverse en fonction de I_n, A, α et β.

B - On s'intéresse à la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) H est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser.

2) $H - I_5$ est-elle inversible ? Si oui trouver son inverse ?

* *

*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail